

# 不均質材料の平面熱応力解析とその熱応力緩和機能

## Plane Thermal Stress Analysis of Nonhomogeneous Material and Its Thermal Stress Relaxation Function

大多尾義弘\* 谷川 義信\*\*  
Yoshihiro Ootao Yoshinobu Tanigawa

This paper is concerned with the theoretical treatment of transient plane thermal stress problems of the body involving nonhomogeneous material properties. As the analytical models, we consider a nonhomogeneous hollow circular cylinder and a nonhomogeneous beam due to local heat supplies. We analyze the thermoelastic problem by means of the theory of multilayered composite material and examine the effect of relaxation of the stress distributions in nonhomogeneous body such as a Functionally Gradient Material.

### 1. 緒言

最近、超高温耐熱材料として、一つの材料に顕著な不均質性を持たせることにより、セラミックス材料等の持つ断熱効果と軽金属材料等の持つ材料強度を合わせ持った傾斜機能材料（熱応力緩和型不均質材料）<sup>1)</sup>の開発が積極的に展開されつつあり、これらの不均質材料の熱応力問題における定性的および定量的評価が必要とされている。しかし、熱応力解析において、熱的および力学的材料特性に不均質性を導入した場合、基礎方程式系が非線形となるため、その解析的取り扱いが極めて困難となり、現在まで不均質材料を対象とした報告例は極めて少ないと言える。たとえば、不均質体の熱応力問題を解析的に扱った最近の10年間程度の著名な報告例としては、円柱座標系での軸対称定常熱応力問題に関してKassirの不均質体を取り扱った畑の研究<sup>2)3)</sup>、不均質平板の二次元問題あるいは不均質円板の平面問題について取り扱った菅野らの研究<sup>4)5)6)7)</sup>が見られるが、これらの報告例では、不均質性の設定に大きな制約が課せられている場合が多い。

そこで、本研究では、熱的および力学的材料特性、すなわち、物性値が厚さ方向に関して任意に変化する不均質材料を想定し、解析モデルの一例として、円柱座標系に関して非軸対称加熱を受ける場合の中空円筒<sup>8)</sup>、直角座

標系に関して局部加熱を受ける場合のビーム<sup>9)</sup>を取り上げた。これら二つの解析モデルは平面問題として取り扱うことができ、これらの非定常平面熱応力問題を多層複合材料の理論を近似的に適用して解析し、さらに、傾斜機能材料を想定し、数値計算によりその熱応力緩和機能について検討を行った。

### 2. 解析

(1) 非軸対称加熱を受ける不均質円筒の非定常熱応力  
熱的および力学的特性、すなわち物性値が、半径方向に関し変化する不均質円筒を考え、この中空円筒を、各層が均質等方性であり、かつ隣り合う各層の物性値がわずかつつ変化する多層層状中空円筒により近似する。図

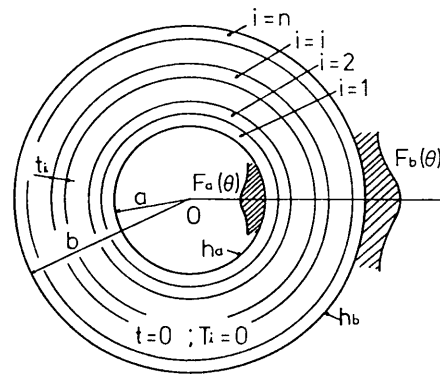


図1 不均質円筒の問題設定

Coordinate system and thermal boundary conditions of nonhomogeneous cylinder

\* システム技術部 情報処理技術研究室

\*\* 大阪府立大学工学部

1に示すように、 $n$ 層からなる内半径 $a$ 、外半径 $b$ の層状複合中空円筒を考える。加熱条件として、初期温度が零度であり、時刻 $t=0$ の瞬間より、内側境界 ( $r=a$ ) および外側境界 ( $r=b$ ) が、それぞれ加熱媒体温度関数 $F_a(\theta)$ 、 $F_b(\theta)$ により、相対熱伝達率 $h_a$ 、 $h_b$ で非常加熱されるものとする。

(A) 温度分布

$n$ 層からなる多層層状中空円筒の各層を内側から順次1, 2, ...,  $n$ と添字を付けて区別する。基礎式、初期条件式、温度境界条件式および界面の熱的連続条件式は、以下のように無次元表示される。

$$\frac{\partial \bar{T}_i}{\partial \tau} = \bar{\kappa}_i \bar{\Delta} \bar{T}_i \quad ; i = 1 \sim n \quad (1)$$

$$\tau = 0 ; \bar{T}_i = 0 \quad ; i = 1 \sim n \quad (2)$$

$$\rho = \bar{a} ; \frac{\partial \bar{T}_1}{\partial \rho} - H_a \bar{T}_1 = -H_a f_a(\theta) \quad (3)$$

$$\rho = R_i ; \bar{T}_i = \bar{T}_{i+1} \quad ; i = 1 \sim (n-1) \quad (4)$$

$$\rho = R_i ; \bar{\lambda}_i \frac{\partial \bar{T}_i}{\partial \rho} = \bar{\lambda}_{i+1} \frac{\partial \bar{T}_{i+1}}{\partial \rho} \quad ; i = 1 \sim (n-1) \quad (5)$$

$$\rho = 1 ; \frac{\partial \bar{T}_n}{\partial \rho} + H_b \bar{T}_n = H_b f_b(\theta) \quad (6)$$

ただし

$$R_i = \bar{a} + \sum_{m=1}^i \bar{t}_m, \quad \bar{\Delta} = \frac{\partial^2}{\partial \rho^2} + \frac{1}{\rho} \cdot \frac{\partial}{\partial \rho} + \frac{1}{\rho^2} \cdot \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} \quad (7)$$

以上の各式において導入した無次元量は、次式で定義される。

$$\begin{aligned} \bar{T}_i &= T_i/T_0, \quad \tau = x_{0t}/b^2, \quad \rho = r/b \\ (\bar{a}, \bar{t}_i) &= (a, t_i)/b, \quad (H_a, H_b) = (h_a, h_b)b \\ \bar{\kappa}_i &= \kappa_i/\kappa_0, \quad \bar{\lambda}_i = \lambda_i/\lambda_0 \\ \{f_a(\theta), f_b(\theta)\} &= \{F_a(\theta), F_b(\theta)\}/T_0 \end{aligned} \quad (8)$$

ただし、 $t$ は時間、 $T_i$ 、 $\kappa_i$ 、 $\lambda_i$ 、 $t_i$ はそれぞれ各層の温度変化、温度伝導率、熱伝導率、厚さであり、 $T_0$ 、 $\kappa_0$ 、 $\lambda_0$ はそれぞれ基準となる温度、温度伝導率、熱伝導率である。まず、媒体温度関数 $f_a(\theta)$ 、 $f_b(\theta)$ は $\theta=0$ に関して対称であると仮定し、次式のように級数展開する。

$$f_a(\theta) = \sum_{m=0}^{\infty} a_m \cos m\theta, \quad f_b(\theta) = \sum_{m=0}^{\infty} b_m \cos m\theta \quad (9)$$

$$\begin{cases} a_m \\ b_m \end{cases} = \frac{\varepsilon_m}{\pi} \int_0^\pi \begin{cases} f_a(\theta) \\ f_b(\theta) \end{cases} \cos m\theta d\theta, \quad \varepsilon_m = \begin{cases} 1; m=0 \\ 2; m \geq 1 \end{cases} \quad (10)$$

条件式(2)～(6)を満足する式(1)の解は、ラプラス変換法により、留数定理を用いて求められる。温度解 $\bar{T}_i$ の非常成分 $\bar{T}_{im}$ は次式で表される。

$$\begin{aligned} \bar{T}_{im} &= \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{j=1}^{\infty} \frac{2 \exp(-\omega_{mj}^2 \tau)}{\omega_{mj} \Delta_m'(\omega_{mj})} \{ \bar{A}_{im}(\omega_{mj}) J_m(\beta_i \omega_{mj} \rho) \\ &+ \bar{B}_{im}(\omega_{mj}) Y_m(\beta_i \omega_{mj} \rho) \} \cos m\theta \end{aligned} \quad (11)$$

ただし

$$\beta_i = \left[ \frac{1}{\kappa_i} \right]^{1/2}, \quad \Delta_m'(\omega_{mj}) = \left\{ \frac{d \Delta_m}{d \omega} \right\}_{\omega = \omega_{mj}} \quad (12)$$

式(11)において $J_m(x)$ 、 $Y_m(x)$ は $m$ 次の第一種および第二種ベッセル関数である。また、境界条件式(3)～(6)から得られる係数行列および定数ベクトルを $[a^{m_{ki}}]$ 、 $[c^{m_{ki}}]$ とし、 $\Delta_m$ を $2n \times 2n$ 行列 $[a^{m_{ki}}]$ の行列式とすれば、 $\bar{A}_{im}$ 、 $\bar{B}_{im}$ はそれぞれ係数行列 $[a^{m_{ki}}]$ の $2i-1$ 列め、 $2i$ 列めを定数ベクトル $[c^{m_{ki}}]$ で置換した行列の行列式となる。また固有値 $\omega_j$ は次式を満足する $j$ 番目の正根である。

$$\Delta_m(\omega) = 0 \quad (13)$$

なお、 $a^{m_{ki}}$ 、 $c^{m_{ki}}$ の成分は紙面の関係上省略する。

(B) 熱弾性解析

前項で求められた温度分布により生じる非常熱応力および熱変位をAiryの熱応力関数法により求める。Airyの熱応力関数を $\chi_i$ とすれば、非軸対称平面ひずみ問題に対する基礎方程式の無次元表示は次式で示される。

$$\bar{\Delta} \bar{\Delta} \bar{\chi}_i = -\bar{k}_i \bar{\Delta} \bar{T}_i, \quad \bar{k}_i = \frac{\bar{\alpha}_i \bar{E}_i}{1-\nu_i} \quad (14)$$

この時、熱応力成分の無次元表示は

$$\begin{aligned} \bar{\sigma}_{rri} &= \frac{1}{\rho} \cdot \frac{\partial \bar{\chi}_i}{\partial \rho} + \frac{1}{\rho^2} \cdot \frac{\partial^2 \bar{\chi}_i}{\partial \theta^2}, \quad \bar{\sigma}_{\theta\theta i} = \frac{\partial^2 \bar{\chi}_i}{\partial \rho^2} \\ \bar{\sigma}_{r\theta i} &= -\frac{\partial}{\partial \rho} \left[ \frac{1}{\rho} \cdot \frac{\partial \bar{\chi}_i}{\partial \rho} \right] \end{aligned} \quad (15)$$

また、軸方向のひずみを拘束しない場合、すなわち

$$\varepsilon_{z i} = C_z \neq 0 \quad (16)$$

のとき、軸方向応力は次式で表される。

$$\bar{\sigma}_{z i} = \nu_i (\bar{\sigma}_{rri} + \bar{\sigma}_{\theta\theta i}) - \bar{E}_i \bar{\alpha}_i \bar{T}_i + \bar{E}_i C_z \quad (17)$$

ここで、本問題に適する式(14)の解は

$$\begin{aligned} \bar{\chi}_i &= D_{im} \rho^2 + E_{im} \ln \rho + (C_{i1} \rho + D_{i1} \rho^{-1} + E_{i1} \rho^3) \cos \theta \\ &+ \sum_{m=2}^{\infty} (C_{im} \rho^m + D_{im} \rho^{-m} + E_{im} \rho^{m+2} + F_{im} \rho^{-m+2}) \\ &\times \cos m\theta + V_i \end{aligned} \quad (18)$$

上式において $V_i$ は次式の特解として求められる。

$$\bar{\Delta} V_i = -\bar{k}_i \bar{\Delta} \bar{T}_i \quad (19)$$

したがって、応力成分は式(18)を式(15)に代入することにより容易に定式化される。また、式(17)、(18)中に含まれる $D_{im}$ 、 $E_{i0}$ 、 $C_{i1}$ 、 $D_{i1}$ 、 $E_{i1}$ 、 $C_{im}$ 、 $D_{im}$ 、 $E_{im}$ 、 $F_{im}$ 、 $C_z$ は力学的境界条件式から決定される未定定数である。内外両表面に外力が作用せず、かつ各層の界面が完全に接着されていると考えれば、力学的条件式は次式で示される。

$$\begin{aligned} \rho &= \bar{a}; \quad \bar{\sigma}_{rr1} = 0, \quad \bar{\sigma}_{r\theta1} = 0 \\ \rho &= R_i; \quad \bar{\sigma}_{rr1} = \bar{\sigma}_{rr1-1}, \quad \bar{\sigma}_{r\theta1} = \bar{\sigma}_{r\theta1-1} \\ \bar{u}_{r1} &= \bar{u}_{r1-1}, \quad \bar{u}_{\theta1} = \bar{u}_{\theta1-1} \\ \rho &= 1; \quad \bar{\sigma}_{rrn} = 0, \quad \bar{\sigma}_{r\theta n} = 0 \\ \sum_{i=1}^n \int_0^{2\pi} \int_{R_{i-1}}^{R_i} \bar{\sigma}_{r\theta} \rho d\rho d\theta &= 0, \quad R_n = \bar{a} \end{aligned} \quad (20)$$

なお、ここで次式の無次元量を導入した、

$$\begin{aligned} \bar{\varepsilon}_{k1i} &= \varepsilon_{k1i}/(\alpha_0 T_0), \quad \bar{\sigma}_{k1i} = \sigma_{k1i}/(\alpha_0 E_0 T_0) \\ \bar{u}_{ki} &= u_{ki}/(\alpha_0 T_0 b), \quad \bar{\alpha}_i = \alpha_i/\alpha_0, \quad \bar{E}_i = E_i/E_0 \end{aligned} \quad (21)$$

ただし、 $u_{ki}$  ( $k=r, \theta$ ),  $\alpha_i, \nu_i, E_i$  はそれぞれ各層の変位成分、線膨張係数、ポアソン比、縦弾性係数であり、 $\alpha_0, E_0$  はそれぞれ基準となる線膨張係数、縦弾性係数を意味する。

以上述べた定式化は非軸対称加熱の場合であるが、平面軸対称加熱の場合の温度解は式(11)において  $m=0$  の場合に相当する。また、熱応力および熱変位は非軸対称の場合と同様に、Airyの熱応力関数法を用いて求められる<sup>10)</sup>。

## (2) 局部加熱を受ける不均質ビームの非定常熱応力

物性値が、厚さ方向に関し変化する有限長の不均質ビームを考え、円筒の場合と同様に、このビームを、各層が均質等方性であり、かつ隣り合う各層の物性値がわずかつつ変化する多層層状ビームにより近似する。図2に示すように、 $n$ 層からなる厚さ  $B$ 、長さ  $2L$  の層状複合ビームを考える。加熱条件として、初期温度が零度であり、時刻  $t=0$  の瞬間より下面および上面が、それぞれ加熱媒体温度関数  $T_{ofa}(x)$ 、 $T_{ofb}(x)$  により、相対熱伝達率  $h_a, h_b$  で加熱し、端面 ( $x=\pm L$ ) からは相対熱伝達率  $h_x$  で熱放散があるものとする。

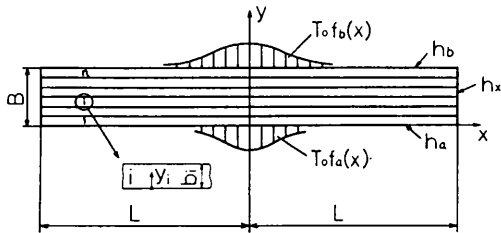


図2 不均質ビームの問題設定

Coordinate system and thermal boundary conditions of nonhomogeneous beam

### (A) 温度分布

$n$ 層からなる多層層状ビームの各層を下面から順次1, 2, ...,  $n$ と添字を付けて区別し、図2に示す様な局所座標  $\bar{y}_i$  を用いれば、基礎式、初期条件式、温度境界条件式および界面の熱的連続条件式は、以下のように無次元表示される。

$$\frac{\partial \bar{T}_i}{\partial \tau} = \bar{\kappa}_i \left[ \frac{\partial^2 \bar{T}_i}{\partial \bar{x}^2} + \frac{\partial^2 \bar{T}_i}{\partial \bar{y}_i^2} \right]; \quad i = 1 \sim n \quad (22)$$

$$\tau = 0; \quad \bar{T}_i = 0 \quad ; \quad i = 1 \sim n \quad (23)$$

$$\bar{y}_1 = 0; \quad \frac{\partial \bar{T}_1}{\partial \bar{y}_1} - H_a \bar{T}_1 = -H_a f_a(\bar{x}) \quad (24)$$

$$\bar{y}_i = b_i, \quad \bar{y}_{i+1} = 0; \quad \bar{T}_i = \bar{T}_{i+1} \quad ; \quad i = 1 \sim (n-1) \quad (25)$$

$$\bar{\lambda}_i \frac{\partial \bar{T}_i}{\partial \bar{y}_i} = \bar{\lambda}_{i+1} \frac{\partial \bar{T}_{i+1}}{\partial \bar{y}_{i+1}}; \quad i = 1 \sim (n-1) \quad (26)$$

$$\bar{y}_n = b_n; \quad \frac{\partial \bar{T}_n}{\partial \bar{y}_n} + H_b \bar{T}_n = H_b f_b(\bar{x}) \quad (27)$$

$$\bar{x} = \pm \bar{L}; \quad \frac{\partial \bar{T}_i}{\partial \bar{x}} \pm H_x \bar{T}_i = 0 \quad ; \quad i = 1 \sim n \quad (28)$$

以上の各式において導入した無次元量は、次式で定義される。

$$\begin{aligned} \bar{T}_i &= T_i/T_0, \quad \tau = \kappa_0 t/B^2, \quad (\bar{x}, \bar{y}_i) = (x, y_i)/B \\ (\bar{b}_i, \bar{L}) &= (b_i, L)/B, \quad (H_a, H_b, H_x) = (h_a, h_b, h_x)B \\ \bar{\kappa}_i &= \kappa_i/\kappa_0, \quad \bar{\lambda}_i = \lambda_i/\lambda_0 \end{aligned} \quad (29)$$

基礎式(22)を時刻  $\tau$  に関するラプラス変換および  $\bar{x}$  に関する有限コサイン変換を用いて解く。条件式(23)~(28)を満足する式(22)の解のうち、非定常成分については

$$\begin{aligned} \bar{T}_{im} &= 2 \sum_{i=1}^n \frac{q_i^2 + H_x^2}{L(q_i^2 + H_x^2) + H_x} \left[ \sum_{j=1}^m \frac{2 \exp(-\mu_j^2 \tau)}{\mu_j \Delta'(\mu_j)} \right. \\ &\quad \times (\bar{A}_i \cosh \beta_{ij} \bar{y}_i + \bar{B}_i \sinh \beta_{ij} \bar{y}_i) \\ &\quad + \sum_{j=m+1}^{\infty} \frac{2 \exp(-\mu_j^2 \tau)}{\mu_j \Delta'(\mu_j)} (\bar{A}_i \cos \gamma_{ij} \bar{y}_i \\ &\quad \left. + \bar{B}_i \sin \gamma_{ij} \bar{y}_i) \right] \cos q_i \bar{x} \end{aligned} \quad (30)$$

ここで  $\Delta$  を  $2n \times 2n$  行列  $[a_{ki}]$  の行列式とすれば、 $\bar{A}_i, \bar{B}_i$  はそれぞれ係数行列  $[a_{ki}]$  の  $2i-1$  列め、 $2i$  列めを定数ベクトル  $[c_k]$  で置換した行列の行列式である。また、式(30)中の  $\beta_i, \gamma_i, \Delta'(\mu_i)$  は

$$\begin{aligned} \beta_i^2 &= -\left[ \frac{\mu^2}{\kappa_i} - q^2 \right], \quad \gamma_i^2 = \frac{\mu^2}{\kappa_i} - q^2 \\ \Delta'(\mu_i) &= \left\{ \frac{d\Delta}{d\mu} \right\} \Big|_{\mu=\mu_i} \end{aligned} \quad (31)$$

であり、 $\mu_j, q_j$  はそれぞれ次式を満足する  $j$  番目および  $l$  番目の固有値である。

$$\Delta(\mu) = 0 \quad (32)$$

$$q \tan(qL) = H_x \quad (33)$$

また、 $\mu_j$  は次式の関係を満たす。

$$\mu_1 < \mu_2 < \dots < \mu_m < \bar{\kappa}_1^{-1/2} q < \mu_{m+1} < \dots \quad (34)$$

なお、温度解の定常成分は紙面の関係上省略する。

(B) 熱弾性解析

前節で求められた温度分布により生じる非定常熱応力をビーム理論により求める。ビームの下面 ( $y = 0$ ) でひずみおよび曲率半径をそれぞれ  $\epsilon_0(x)$ ,  $\rho(x)$  で表せば、軸方向応力の無次元表示は次式で示される。

$$\sigma_{xx} = \bar{E}_i \left\{ \bar{\epsilon}_0(\bar{x}) + \bar{\rho}(\bar{x})^{-1} \left[ \bar{y}_i + \sum_{k=1}^{i-1} \bar{b}_k \right] \right\} - \bar{\alpha}_i \bar{E}_i \bar{T} \quad (35)$$

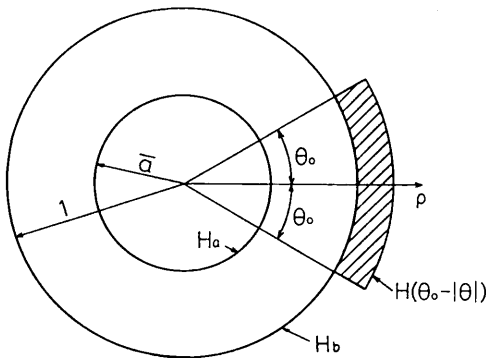
ここで次式の無次元量を導入した。

$$\bar{\epsilon}_0 = \epsilon_0 / (\alpha_0 T_0), \bar{\rho} = \rho \alpha_0 T_0 / B \quad (36)$$

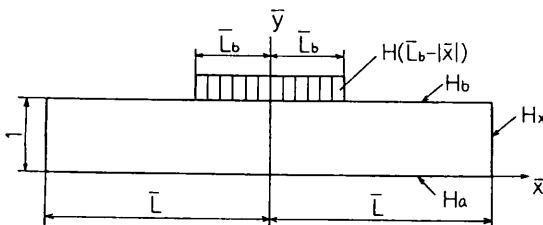
式 (35) に含まれる  $\bar{\epsilon}_0(\bar{x})$ ,  $\bar{\rho}(\bar{x})$  は軸方向に関する合力および板厚にわたる合モーメントの釣合い条件より決定される。

3. 数値計算

前章で求めた理論解に対する数値計算結果を以下に示す。不均質特性として、加熱の作用を受ける境界上でアルミナ、冷却を受ける境界上でアルミ合金の物性値を持つ不均質材料を考えると、物性値が厚さ方向に関し連続的に変化する場合を想定した。本研究では、この連続的な変化の割合は任意に設定することができるが、その一例として厚さ方向に関する直線的な変化の場合を



(a)



(b)

図3 数値計算のための加熱条件  
Heat conditions for numerical examples

取り上げた。

まず、中空円筒の場合の計算例として、図3 (a) に示す様に、外側媒体からの局所的な加熱を受ける場合を取り上げた。すなわち、加熱条件および円筒の形状に関する計算諸元を次式により与え、物性値を表1に示した。

$$H_a = H_b = 10.0, \bar{a} = 0.5$$

$$f_a(\theta) = 0, f_b(\theta) = H(\theta_0 - |\theta|), \theta_0 = 30^\circ$$

ここで、 $H(x)$  はヘビサイド関数である。

表1 アルミナ、アルミ合金の物性値

Material properties of alumina and aluminum alloy		
	アルミナ	アルミ合金
温度伝導率 $\kappa$ , [m <sup>2</sup> /s]	11.9x10 <sup>-6</sup>	90.6x10 <sup>-6</sup>
熱伝導率 $\lambda$ , [W/(mK)]	3.6x10	22.2x10
線膨張係数 $\alpha$ , [1/K]	8.0x10 <sup>-6</sup>	23.6x10 <sup>-6</sup>
縦弾性係数 E, [GPa]	34.3x10	7.0x10
ポアソン比 $\nu$	0.22	0.33

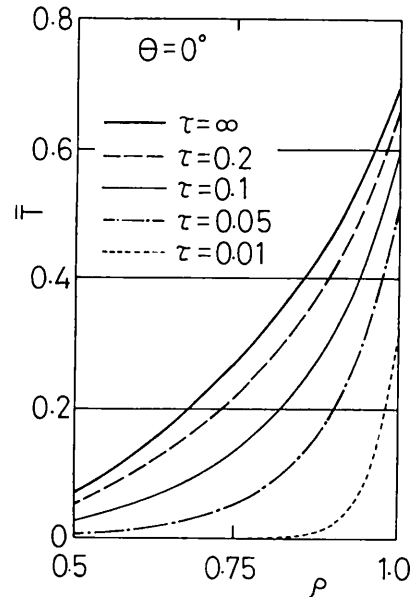


図4 半径方向温度分布 (不均質円筒,  $\theta = 0^\circ$ )

Temperature distribution in the radial direction (nonhomogeneous cylinder,  $\theta = 0^\circ$ )

図4は加熱を受ける中心 ( $\theta = 0^\circ$ ) での半径方向に関する温度分布を示す。さらに、図5には、図4と比較するため、2層複合円筒 (加熱を受ける外側領域がアルミナ、内側領域がアルミ合金からなり、二つの層が等しい厚さの複合円筒) に対する結果を示す。これらの図より、2層複合円筒では物性値の相違により加熱を受ける外側領域で大きな温度勾配を示し、かつ界面で温度勾配の不連続を示すのに対して、不均質円筒では、半径方向に関し滑らかな曲線となるのがわかる。

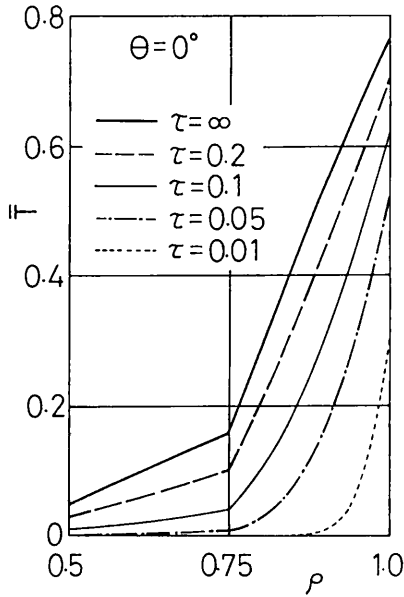


図5 半径方向温度分析 (2層複合円筒,  $\theta = 0^\circ$ )  
Temperature distribution in the radial direction (2layered composite cylinder,  $\theta = 0^\circ$ )

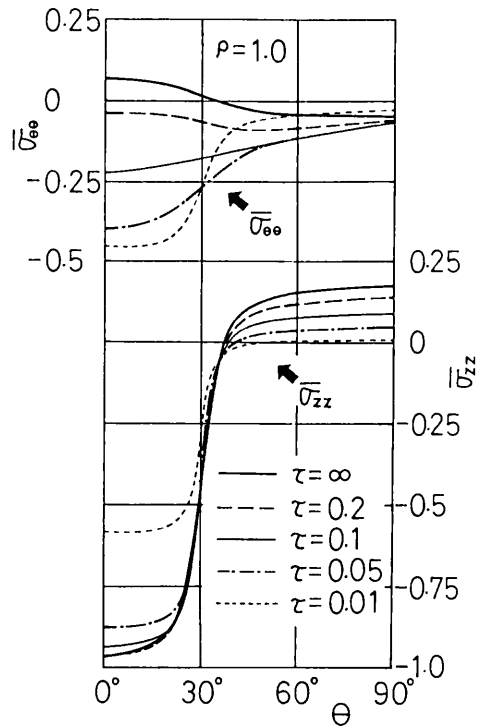


図7 加熱境界上の応力  $\bar{\sigma}_{\theta\theta}$ ,  $\bar{\sigma}_{zz}$  の分布 (不均質円筒,  $\rho = 1$ )  
Distribution of stress  $\bar{\sigma}_{\theta\theta}$  and  $\bar{\sigma}_{zz}$  along the outer surface (nonhomogeneous cylinder,  $\rho = 1$ )

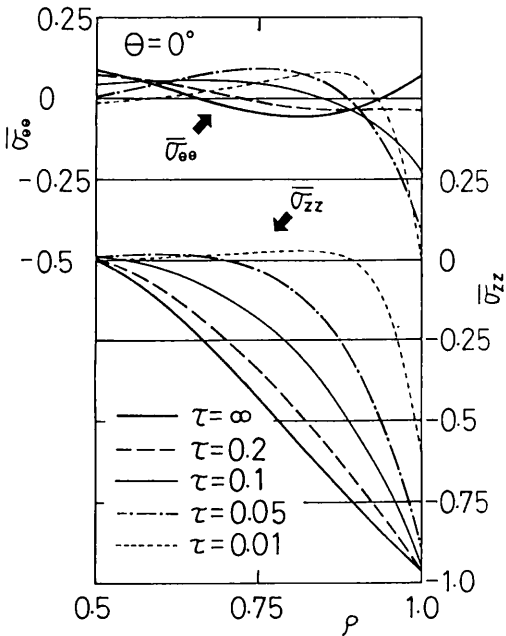


図6 応力  $\bar{\sigma}_{\theta\theta}$ ,  $\bar{\sigma}_{zz}$  の半径方向分布 (不均質円筒,  $\theta = 0^\circ$ )  
Distribution of stress  $\bar{\sigma}_{\theta\theta}$  and  $\bar{\sigma}_{zz}$  in the radial direction (nonhomogeneous cylinder,  $\theta = 0^\circ$ )

垂直応力の  $\bar{\sigma}_{\theta\theta}$ ,  $\bar{\sigma}_{zz}$  の分布を図6～8に示す。図6, 7はそれぞれ加熱を受ける中心 ( $\theta = 0^\circ$ ) での半径方向の分布および加熱境界上 ( $\rho = 1$ ) での周方向の分布を示す。また、図6との比較のため、前述の2層複合円筒にお

る加熱を受ける中心での半径方向の分布を図8に示す。図7より加熱領域端 ( $\theta = 30^\circ$ ) 近傍で応力の分布状態が大きく変動し、特に  $\bar{\sigma}_{zz}$  にその傾向が顕著に見られる。図8より、円周方向応力  $\bar{\sigma}_{\theta\theta}$  に関し、2層複合円筒では異種材料間の界面に大きな応力の不連続が現れ、かつ、加熱を受けるアルミナ側に強度上問題となる大きな引張応力が現れることがわかる。図6と図8を比較すれば、生じる熱応力の絶対値に関して、2層材の場合よりも不均質材の場合のほうが、かなり小さく、熱応力緩和効果が明確であることがわかる。

次に、ビームの場合の計算例として、図3 (b) に示す様に、上面からの局所的な加熱を受ける場合を取り上げた。すなわち、加熱条件およびビームの形状に関する計算諸元を次式で与えた。

$$H_a = H_b = 10.0, H_x = 1.0, \bar{L} = 3.0$$

$$f_a(\bar{x}) = 0, f_b(\bar{x}) = H(\bar{L}_b - |x|), \bar{L}_b = 1.0$$

図9は加熱を受ける中心 ( $\bar{x} = 0$ ) での厚さ方向に関する温度分布を示す。図10は垂直応力  $\bar{\sigma}_{xx}$  の厚さ方向の分布を示す。また、図10と比較のため2層複合ビーム (加熱を受ける上側領域がアルミナ、下側領域がアルミ合金からなり、二つの層が等しい厚さの複合ビーム) に対する結果を図11に示す。図10, 図11より、不均質材の熱応力

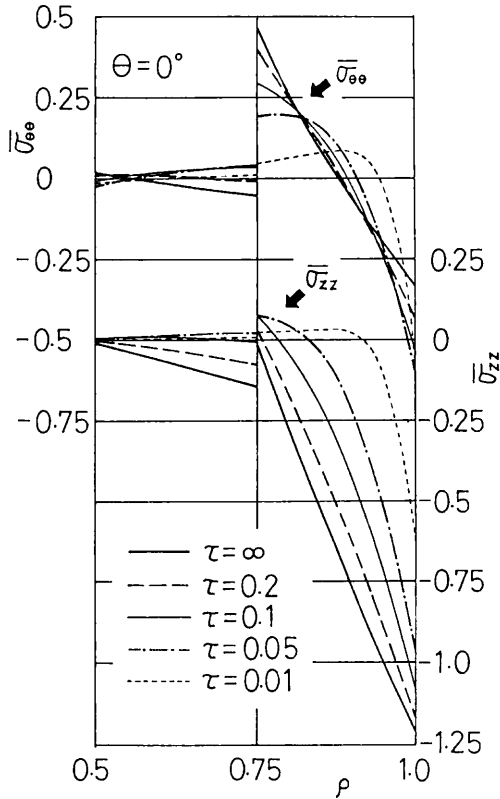


図8 応力  $\sigma_{\theta\theta}$ ,  $\sigma_{zz}$  の半径方向分布 (2層複合円筒,  $\theta = 0^\circ$ )  
Distribution of stress  $\sigma_{\theta\theta}$  and  $\sigma_{zz}$  in the radial direction (2layered composite cylinder,  $\theta = 0^\circ$ )

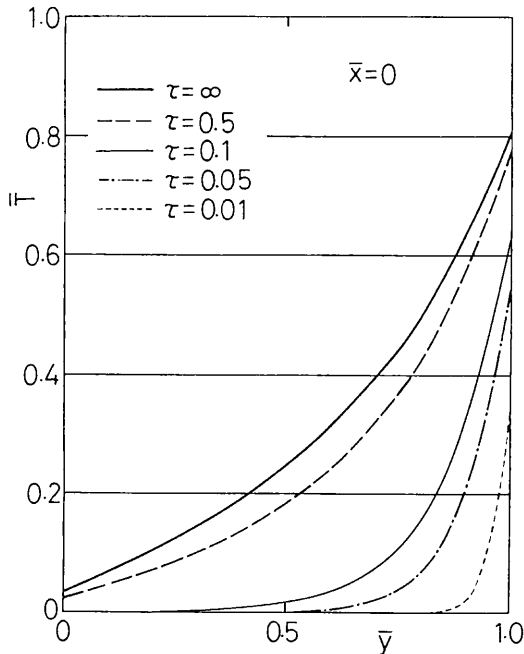


図9 厚さ方向温度分布 (不均質ビーム,  $\bar{x} = 0$ )  
Temperature distribution in the thickness direction (nonhomogeneous beam,  $\bar{x} = 0$ )

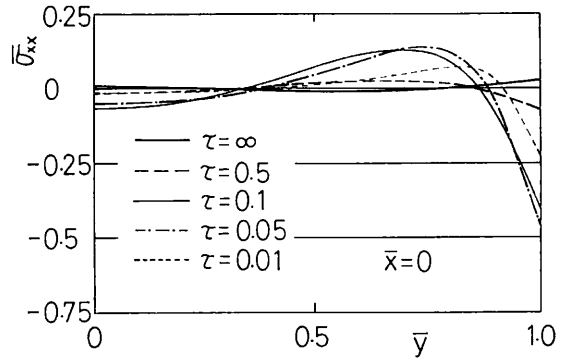


図10 応力  $\bar{\sigma}_{xx}$  の厚さ方向分布 (不均質ビーム,  $\bar{x} = 0$ )  
Distribution of stress  $\bar{\sigma}_{xx}$  in the thickness direction (nonhomogeneous beam,  $\bar{x} = 0$ )

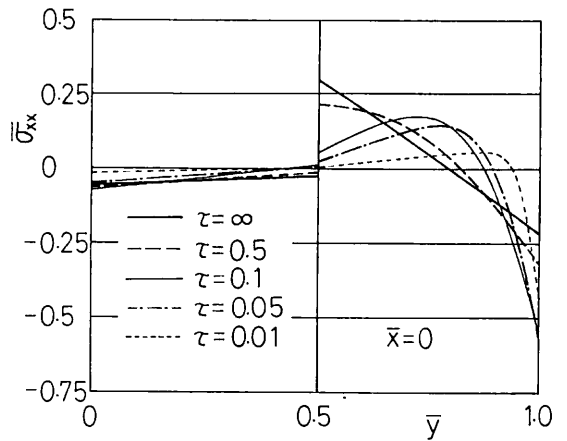


図11 応力  $\sigma_{xx}$  の厚さ方向分布 (2層複合ビーム,  $\bar{x} = 0$ )  
Distribution of stress  $\bar{\sigma}_{xx}$  in the thickness direction (2layered composite beam,  $\bar{x} = 0$ )

緩和効果が明確であることがわかる。

なお、実際の数値計算では、不均質中空円筒および不均質ビームをそれぞれ均等な厚さの20層 ( $n = 20$ )、10層 ( $n = 10$ ) に分割し、演算を行った。また、無次元量の基準となる物性値  $\lambda_0$ ,  $\lambda_1$ ,  $\alpha_0$ ,  $E_0$  についてはアルミ合金の物性値を用いた。

#### 4. 結 言

本報では、不均質材料からなる二種類の代表的なモデル (中空円筒, 有限長ビーム) の非定常熱応力を平面問題として理論解析し、局部加熱を受ける場合に対して数値計算結果を示した。異種材料からなる複合材料の場合、その界面近傍に大きな熱応力の発生が予測されるのに対して、不均質材料の特性は、界面をなくすことにより著しい熱応力緩和効果を示しうることであり、本報告の数値計算結果からもこの特性がうかがえる。

なお、本研究で示した解析の手法は、円柱座標系およ

び直角座標系におけるより複雑な加熱条件下での問題、たとえば、三次元問題や移動熱源問題にも容易に拡張しうる手法であり、これらについては続報として報告の予定である。

#### 参 考 文 献

- 1) たとえば、新野・ほか2名, 日本複合材料学会誌, 13, 257 (1987); Proceedings of The First International Symposium on Functionally Gradient Materials (1990).
- 2) 畑, 日本機械学会論文集, 49-448A, 1515 (1983)
- 3) 畑, 日本機械学会論文集, 51-467A, 1789 (1985)
- 4) Sugano, Y., Theoretical and Applied Mech., 34, 183 (1986)
- 5) Sugano, Y., Ingenieur-Archiv, 57, 147 (1987)
- 6) 菅野, 日本機械学会論文集, 54-501A, 1015 (1988)
- 7) 菅野, 明石, 日本機械学会論文集, 55-509A, 89 (1989)
- 8) Ootao, Y., Fukuda, T. and Tanigawa, Y., Theoretical and Applied Mech., 38, 177 (1989)
- 9) Ootao, Y., Tanigawa, Y. and Murakami, H., J. Thermal Stresses, 13, 193 (1990)
- 10) 谷川, 福田, 大多尾, 谷村, 日本機械学会論文集, 55-513A, 1133 (1989)